INSTITUTO FEDERAL
São Paulo
Câmpus Campinas

OpenCon 2017
CAMPINAS

Centro de Tecnologia da Informação Renato Archer

Transformações lineares, elipses e circunferências

Vitória Aparecida Santos Ferreira[1]; Matheus Bernardini[1]
1 - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Campus Campinas

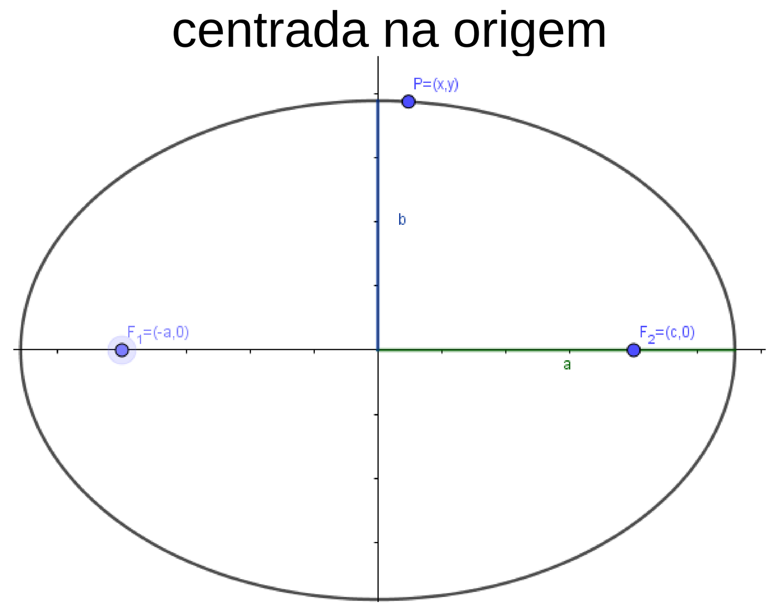
Objetivo

Por meio da composição de transformações lineares e de operações com matrizes, objetiva-se comparar a rotação de pontos na circunferência unitária e na elipse de semi-eixos a e b, ambas centradas na origem. Ver (1) e (2).

Introdução

Sejam $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}_+^*$. Denomina-se elipse $\mathcal{E}$ (figura 1) de focos F_1 e F_2 e eixo maior $2a$ o conjunto de pontos $P \in \mathbb{R}^2$ cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual à constante $2a$. Sendo $a > c$ e $c \in \mathbb{R}_+^*$, $2c$ é a distância focal, ou seja, $d(F_1, F_2) = 2c$. O número real positivo b é a distância do centro da elipse (neste caso, $O = (0,0)$) a qualquer um dos vértices que estão sobre a reta não focal.

Figura 1: Elipse de semi-eixos a e b, centrada na origem



Fonte: Produzido pelos autores

cuja equação geral é: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Materiais e Métodos

Considere a transformação linear $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que

$$T_1(x, y) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right),$$

com a e b números reais não-nulos. Observe que T_1 está associada à matriz

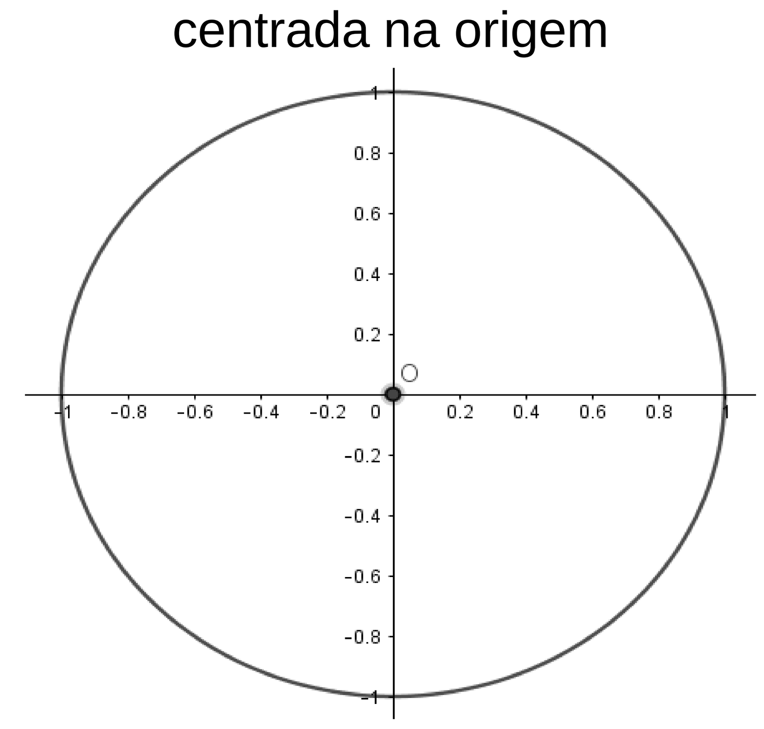
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

e é possível reescrever T_1 na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{y}{b} \end{pmatrix}.$$

Ao restringir a transformação linear T_1 à elipse $\mathcal{E}$, obtemos como imagem dessa aplicação a circunferência unitária centrada na origem (figura 2), $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 = 1\}$.

Figura 2: Circunferência unitária, centrada na origem



Fonte: Produzido pelos autores

A rotação por um ângulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ de um ponto no plano está associada à transformação linear $T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $T_2(x, y) = (x \cos\alpha - y \,\mathrm{sen}\,\alpha \,, x \,\mathrm{sen}\,\alpha + y \cos\alpha)$.

Observe que T_2 está associada à matriz

$$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

e é possível escrever T_2 na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Ao restringir a transformação linear T_2 à circunferência S , obtemos como imagem dessa aplicação a própria circunferência S.

Para finalizar, é necessário voltar à elipse. Para fazer isso, basta utilizar a transformação linear $T_3: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que

$$T_3(x, y) = (ax, by).$$

Observe que T_3 está associada à matriz

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

e é a inversa da matriz A, isto é, $C = A^{-1}$.

Resultados Preliminares

Através dos procedimentos acima, tem-se que a composição das transformações lineares que fornece a rotação na elipse é dada por $T: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, em que T está associada à composição das transformações lineares dadas pela matrizes A, B e C e pode ser vista como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to C \cdot B \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemplo: Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ e o ponto $P = (3,0)$ pertencente a ela e o ângulo considerado, na circunferência, será $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Ao aplicar T_1 ao ponto P, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3/3 \\ 0/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando T_2 (com $\alpha = \pi/4$) a esse vetor, obtém-se:

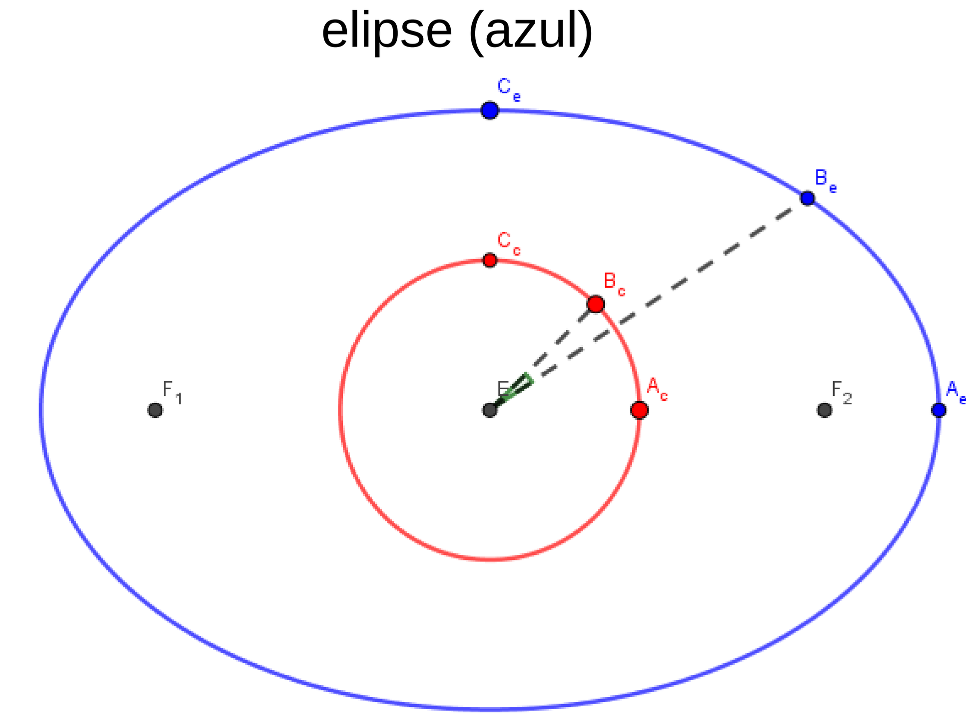
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} \\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, aplicando T_3, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Conclusão

Figura 3: Comparação da rotação de pontos na circunferência (vermelha) e na elipse (azul)



Fonte: Produzido pelos autores

Referências

(1) CAMPOLINO, M. L. **Translação e rotação de cônicas em $\mathbb{R}^2$.** Dissertação (Mestrado em Matemática), Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, Brasília, 2014 .

(2) SOUZA, V. R. B**. Cônicas, Álgebra Linear e GeoGebra, uma combinação que deu certo**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.